

**Elektriciteit en magnetisme 2**

Instructor: A.M. van den Berg

Nederlandse versie: zie pagina's 4-6

You don't have to use separate sheets for every question.

Write your name and S number on every sheet

There are **6** questions with a total number of marks: 105

Your answers can be either in Dutch or in English

**WRITE CLEARLY**

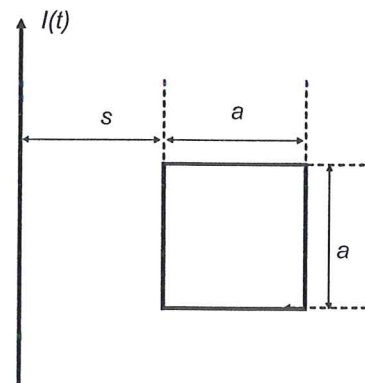
(1) (Total 20 marks)

A square loop, side  $a$ , resistance  $R$ , lies at a distance  $s$  from an infinite straight wire that carries current  $I$ ; see the figure. This current decreases gradually according to the following equations:

$$I(t) = (1 - \alpha t)I_0, \text{ for } 0 \leq t \leq 1/\alpha$$

$$I(t) = 0, \text{ for } t > 1/\alpha$$

- (a; 5 marks)  
Give an expression for the magnetic field strength caused by the current through the wire.
- (b; 5 marks)  
Calculate the magnetic flux within the area of the square loop.
- (c; 5 marks)  
Calculate the induced electromotive force and the induced current in the square loop.
- (d; 5 marks)  
Give the direction of the current in the square loop and explain your answer.



(2) (Total 10 marks)

Sun light is being reflected on the surface of a lake. A person stands near the side of the lake and carries sunglasses. What should be the polarization direction of these sunglasses to minimize the intensity of the reflected sun light.

- (a; 5 marks)  
Horizontal or vertical?
- (b; 5 marks)  
Explain your answer.

(3) (Total 25 marks)

In the figure, a parallel plate capacitor has square plates of edge length  $L = 1.0$  m. A current of  $2.0$  A charges the capacitor, producing a uniform electric field  $\vec{E}$  between the plates, with  $\vec{E}$  perpendicular to the plates; forget about edge effects.

- (a; 5 marks)

What is the value of  $\partial E/\partial t$  in the region between the plates?

- (b; 5 marks)

What is the displacement current  $I_d$  through the region between the plates?

- (c; 5 marks)

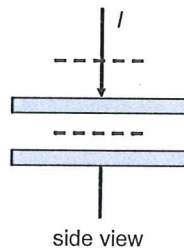
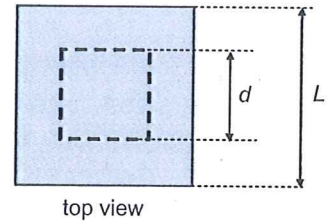
What is the displacement current enclosed by the square dashed path of edge  $d = 0.5$  m?

- (d; 5 marks)

What is the value of the path integral  $\oint \vec{B} \circ d\vec{s}$  around this square dashed path?

- (e; 5 marks)

Calculate also the path integral  $\oint \vec{B} \circ d\vec{s}$  around a square with edge  $d = 0.5$  m which lies above the top plate and which is parallel to this plate.



(4) (Total 20 marks)

Suppose that the electric field vector for a spherical wave is given as:

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = A \frac{\sin \theta}{r} \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \hat{\phi}$$

with  $\omega/k = c$ .

For notational convenience let  $u \equiv (kr - \omega t)$  in your calculations and use:

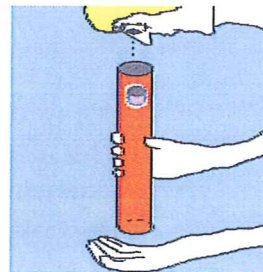
$$\int \cos(u) dt = -\frac{1}{\omega} \sin(u) \quad \text{and} \quad \int \sin(u) dt = +\frac{1}{\omega} \cos(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \cos(u) = -k \sin(u) \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial r} \sin(u) = +k \cos(u)$$

- (a) (15 marks) Show that  $\vec{E}$  obeys all four Maxwell's equations, in vacuum, and find the associated magnetic field.
- (b) (5 marks) Calculate the Poynting vector.

(5) (Total 10 marks)

During a demonstration of falling objects, one drops a piece of steel down through a pipe made of copper. As you might expect the piece of steel accelerates very close to value of the acceleration due to gravity. Only air friction and some possible rubbing against the inside of the tube prevents full acceleration. The piece of steel is replaced by a strong magnet with the same shape as the piece of steel.



- (a; 5 marks)  
Will this magnet travel within the same time, faster, or slower, through the pipe as compared to the piece of steel?
- (b; 5 marks)  
Explain your answer.

(6) (Total 20 marks)

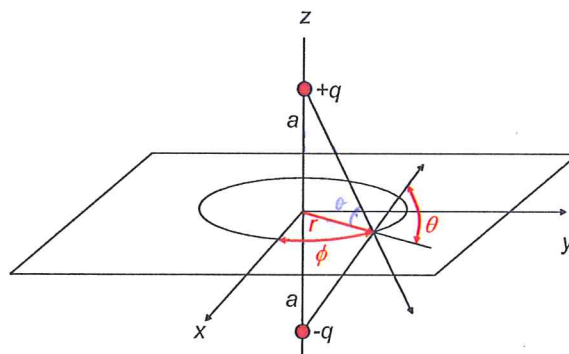
Consider two equal point charges  $q$ , separated by a distance  $2a$ ; see the figure. Construct the  $xy$  plane equidistant from the two charges. By integrating the Maxwell stress tensor over this plane, determine the force of one charge on the other, where the force is given as:

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \circ d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau$$

The components of the Maxwell stress tensor  $\overleftrightarrow{T}$  are given as:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

- (a; 5 marks)  
Give the three components of  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ,  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , and  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$  in terms of  $q$ ,  $r$ ,  $\phi$ , and  $\theta$  for this configuration in the equidistant plane. Here  $\theta$  and  $\phi$  are the angles as indicated in the figure.
- (b; 5 marks)  
Given an expression for the components of  $d\vec{a} = (da_x, da_y, da_z)$  in terms of  $r$ ,  $\phi$ , and  $\theta$ .
- (c; 10 marks)  
Determine the force on the upper charge using the Maxwell stress tensor.



**Elektriciteit en magnetisme 2**

Instructor: A.M. van den Berg

Het is niet noodzakelijk iedere vraag op een apart vel te maken.

Plaats op ieder vel je naam en S-nummer

Er zijn **6 vragen** met een totaal aantal punten: 105

Antwoorden mogen gegeven worden in het Nederlands of in het Engels

**SCHRIJF DUIDELIJK**

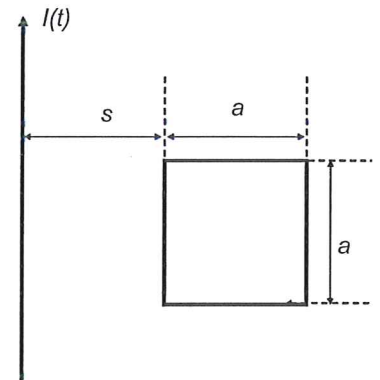
(1) (Totaal 20 punten)

Een vierkante lus met zijde  $a$ , en weerstand  $R$ , ligt op een afstand  $s$  van een oneindig lange rechte draad, waardoor een stroom  $I$  loopt; zie de figuur. Deze stroom neemt geleidelijk af als gegeven in de onderstaande vergelijkingen:

$$I(t) = (1 - \alpha t)I_0, \quad \text{voor } 0 \leq t \leq 1/\alpha$$

$$I(t) = 0, \quad \text{voor } t > 1/\alpha$$

- (a; 5 punten)  
Geef een uitdrukking for de magnetische veldsterkte die veroorzaakt wordt door de stroom door deze draad.
- (b; 5 punten)  
Bereken de magnetische flux door het oppervlakte van de vierkante lus.
- (c; 5 punten)  
Bereken de geïnduceerde elektromotorische kracht en de geïnduceerde stroom in de vierkante lus.
- (d; 5 punten)  
Geef aan wat de richting is van de stroom in de vierkante lus en verklaar je antwoord.



(2) (Totaal 10 punten)

Het licht van de zon wordt gereflecteerd op het water oppervlak van een meer. Iemand staat aan de kant van het meer en draagt een zonnebril. Wat moet de polarisatie richting zijn van de glazen in de zonnebril om de intensiteit van het teruggekaatste zonlicht te minimaliseren?

- (a; 5 punten)  
Horizontaal of verticaal?
- (b; 5 punten)  
Verklaar je antwoord.



(3) (Totaal 25 punten)

De figuur toont een parallelle plaat condensator opgebouwd uit vierkante platen met een lengte  $L = 1.0$  m. Een stroom ter grootte  $2.0$  A laadt de condensator, waardoor een uniform elektrisch veld  $\vec{E}$  tussen de platen van de condensator wordt gemaakt, waarbij  $\vec{E}$  loodrecht op de platen staat; vergeet rand effecten.

- (a; 5 punten)

Wat is de waarde van  $\partial E/\partial t$  in het gebied tussen de platen?

- (b; 5 punten)

Wat is de waarde van de verplaatsingsstroom  $I_d$  in het gebied tussen de platen?

- (c; 5 punten)

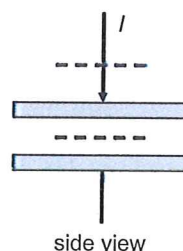
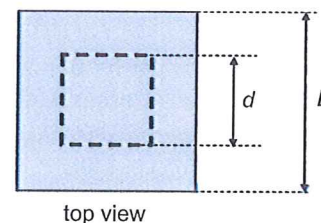
Hoe groot is de verplaatsingsstroom in het gebied dat omsloten wordt door een vierkant met zijde  $d = 0.5$  m, dat als de gestreepte lijnen is weergegeven in de figuur?

- (d; 5 punten)

Bereken de pad integraal  $\oint \vec{B} \circ d\vec{s}$  over de randen van dat vierkant met zijde  $d = 0.5$  m.

- (e; 5 punten)

Bereken ook de pad integraal  $\oint \vec{B} \circ d\vec{s}$  over een vierkant met zijde  $d = 0.5$  m, dat ligt boven de bovenste plaat van de condensator en waarbij dat vierkant parallel is aan deze bovenste plaat.



(4) (Totaal 20 punten)

Neem aan dat de elektrische veld vector voor een bolvormige golf geschreven kan worden als:

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = A \frac{\sin \theta}{r} \left[ \cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr} \sin(kr - \omega t) \right] \hat{\phi}$$

met  $\omega/k = c$ .

Gebruik de afkorting  $u \equiv (kr - \omega t)$  in de berekeningen en gebruik:

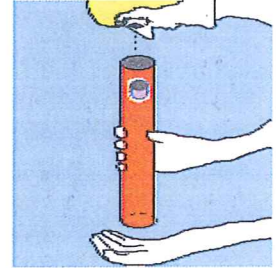
$$\int \cos(u) dt = -\frac{1}{\omega} \sin(u) \quad \text{en} \quad \int \sin(u) dt = +\frac{1}{\omega} \cos(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \cos(u) = -k \sin(u) \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial r} \sin(u) = +k \cos(u)$$

- (a; 15 punten) Laat zien, dat  $\vec{E}$  een oplossing is voor de vier vergelijkingen van Maxwell in vacuüm, en bepaal het bijbehorende magnetische veld.
- (b; 5 punten) Bereken de Poynting vector.

(5) (Totaal 10 punten)

Tijdens een demonstratie van vallende voorwerpen, laat men een stalen voorwerp door een koperen buis naar beneden vallen. Zoals je mag verwachten is de versnelling van het voorwerp vrijwel gelijk aan de valversnelling veroorzaakt door de zwaartekracht. Alleen wrijving door lucht en mogelijke botsingen met de binnenzijde van de buis verhinderen dat. Het stalen voorwerp wordt vervangen door een sterke magneet, dat dezelfde vorm heeft als het stalen voorwerp.



- (a; 5 punten)  
Geef aan of deze magneet sneller, langzamer, of binnen dezelfde tijd door deze buis zal gaan, vergeleken met het stalen voorwerp.
- (b; 5 punten)  
Verklaar je antwoord.

(6) (Totaal 20 punten)

Beschouw gelijke punt ladingen  $q$ , met een onderlinge afstand  $2a$ ; zie de figuur. Maak een  $xy$  vlak, dat in het midden van deze twee ladingen ligt. Door de Maxwell stress tensor te integreren over dit vlak wordt de kracht berekend, die de ene lading op de andere uitoefent. Deze uitdrukking voor deze kracht is:

$$\vec{F} = \oint_S \overleftrightarrow{T} \circ d\vec{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \vec{S} d\tau$$

De componenten van de Maxwell stress tensor  $\overleftrightarrow{T}$  zijn:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)$$

- (a; 5 punten)  
Geef de drie componenten van  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ ,  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ , en  $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$  in termen van  $q$ ,  $r$ ,  $\phi$ , en  $\theta$  in het middenvlak voor de gegeven configuratie.
- (b; 5 punten)  
Geef een uitdrukking voor de componenten van  $d\vec{a} = (da_x, da_y, da_z)$  in termen van  $r$ ,  $\phi$ , en  $\theta$ . De hoeken  $\theta$  en  $\phi$  zijn aangegeven in de figuur.
- (c; 10 punten)  
Bepaal de kracht op de bovenste lading met behulp van de Maxwell stress tensor.

